**Giovanni Busetti: Appunti di analisi matematica**

Note iniziali: • fattorizzazione della differenza di cubi:

• la funzione valore assoluto è derivabile in , la sua derivata è

• se una funzione è definita a tratti, anche la derivata è definita a tratti, ma gli estremi sono esclusi

• sviluppo di :

Successioni

Sia un insieme, si dice successione in ogni funzione del tipo che associa ad ogni valore di un valore di . Il corrispondente di , è l’n-esimo termine della successione.

La successione si indica con . Se , la successione si dice reale, a termini reali.

L’insieme dei termini si dice insieme delle immagini. Se è limitata, è un insieme limitato, e viceversa.

**\*Limiti di successione**

ovvero

Si ha che tutti i termini della successione sono definitivamente compresi in un intervallo:

Se , la successione si dice infinitesima.

Nel caso di un limite uguale a ±∞, .

Una successione che ammette limite è regolare; se il limite appartiene a, la successione è convergente, se invece il limite è ±∞ la successione è divergente. Le successioni costanti sono convergenti. L’insieme dei termini di una successione convergente è limitato.

**Insieme esteso**

Si definiscono anche in la relazione d’ordine totale , prodotto e somma, l’unicità del limite, …

**Verifica definitiva**

Siano e due successioni reali in ; ,

se e , allora anche

**\*Teorema**

Sia ,

per assurdo, sia e , allora . Quindi se si scegliesse si avrebbe (assurdo).

**\*Teorema: unicità del limite**

Siano una successione in ; .

Dim: e anche

Scegliendo ,

Per il teorema precedente se , allora quindi

**\*Teorema: limite e valore assoluto**

• Se è convergente, allora è convergente ed il suo limite è , dove è il limite di .

• Se è divergente, allora

•

**\*Teorema del confronto**

Siano e due successioni reali in ; .

,

se ;

se allora è superiormente limitata, quindi per ipotesi anche lo è;

se allora la tesi è verificata;

se allora

se , per assurdo, si supponga , quindi , quindi . Se si pone nella definizione di limite, definitivamente si ha ed in particolare . Ugualmente, da si ottiene . Si avrebbe che ovvero (assurdo).

**Teorema della permanenza del segno**

Siano una successione in ; **.**  .

Questo è verificato per ogni numero naturale, non solo 0.

**\*Teorema dei due carabinieri**

Siano , , successioni reali in ; .

Se , allora

Dimostrazione: sia , definitivamente si ha che quindi e allo stesso modo anche .

Quindi , quindi , che è la definizione di limite.

Inoltre, e, allo stesso modo, .

**\*Teorema: limite della somma**

Siano e due successioni reali in ; . Se e se è definito, allora è regolare e

Dimostrazione: nel caso di con si ha che . Inoltre, si sa che è regolare e convergente, quindi limitata, quindi , quindi .

**Teorema: limite del prodotto**

Siano e due successioni regolari in , , se e se è definito, allora è regolare e .

**Forme indeterminate**

; ; 0 ; ; ; ; (

**Teorema: limite del reciproco**

Sia unasuccessione regolare in tale che

• se è convergente e , allora è convergente e

• se è divergente allora

• se e è definitivamente positiva, allora

• se e è definitivamente negativa, allora

**Successioni trascurabili**

Siano e due successioni reali in , tali che , si dice che è trascurabile rispetto a se , ed in tal caso si scrive . Questo metodo consente di confrontare due infiniti, e di risolvere alcune forme indeterminate.

**Successioni equivalenti**

Siano e due successioni reali in , si dice che è equivalente a se esiste una successione in tale che: •

•

Quindi , ed in tal caso si scrive . è una relazione d’equivalenza. È importante notare che l’equivalenza si conserva per prodotti o quozienti, ma non si può affermare lo stesso per somme e differenze.

Ogni successione polinomiale è equivalente al suo termine di grado più alto.

**Successioni crescenti e decrescenti**

Sia unasuccessione in , si dice che è crescente (decrescente) se, ; strettamente crescente (decrescente) se , . Se è crescente o decrescente si dice che la stessa è monotona: . Se una funzione è monotona, essa ammette limite (è regolare).

Sia unasuccessione in : • è crescente

• è decrescente

**\*Criterio del rapporto**

Sia unasuccessione in tale che , si ha che , o anche, altrimenti, , mentre non è possibile affermare niente negli altri casi. Il criterio del rapporto consente di risolvere, in alcuni casi, forme indeterminate del tipo .

Dimostrazione: L’idea è di dimostrare che è maggiore di una successione infinita (infinitesima nel secondo caso). Se , allora . Per il teorema della permanenza del segno si ha che , cioè . Ripetendo all’infinito il procedimento: , dove è il primo termine della successione. Quindi,, . Poiché , , per il teorema dei due carabinieri, anche ., ponendo , per il teorema della permanenza del segno definitivamente: quindi è infinitesima. La dimostrazione se è analoga, ma in questo caso , e .

Funzioni elementari

**Funzione esponenziale**

con

Proprietà: • ,

• ,

• ,

• ,

• è strettamente monotona, crescente se , decrescente se

**Funzione logaritmo**

con

Proprietà: • , ,

•

• ,

• , • , ,

• ,

• è strettamente monotona, crescente se , decrescente se

**Funzioni trigonometriche**

Relazioni e formule: •

• *Formule di addizione*

•

•

• *Formule di duplicazione*

•

• *Formule di bisezione*

•

• *per il calcolo di integrali*

•

•

• *Archi associati*

•

Formule parametriche: •

•

•

Formule di Werner: •

•

•

Formule di Prostaferesi: •

•

•

•

**Funzioni iperboliche**

; ; ;

Relazioni e formule: •

•

• ;

Funzioni

Una funzione è un tipo di relazione che associa ad un elemento di un insieme di partenza (dominio) uno ed uno solo elemento di un insieme di arrivo (codominio). Geometricamente, una retta verticale che interseca il grafico di lo interseca in un unico punto: non esistono due ascisse con la stessa ordinata.

Siano , insiemi e una relazione da a , si dice che è una funzione da se:

e anche

È equivalente la definizione: .

Se , è dominio di e si indica con , allo stesso modo è codominio di . Mentre il dominio è individuato univocamente, il codominio può variare. Si definisce poi un sottoinsieme del codominio, l’insieme delle immagini di , ovvero l’insieme di tutti i valori assunti da , come .

**Funzione identità**

Sia un insieme, si dice identità, o funzione identica, in , la funzione , .

**Funzione composta**

Siano e tali che , si dice composizione di e , o anche funzione composta di e , la funzione tale che .

La composizione di funzioni è possibile solo se le immagini della prima funzione appartengono al dominio della seconda.

**Funzione iniettiva**

Sia , si dice che è iniettiva se , e si scrive .

Una funzione iniettiva associa ad ogni elemento del dominio un solo elemento del codominio. Geometricamente, una retta orizzontale che interseca il grafico di lo interseca in un unico punto: non esistono due ascisse con la stessa ordinata. La funzione composta di due funzioni iniettive è un’altra funzione iniettiva. Una funzione strettamente monotona è sempre iniettiva.

**Funzione suriettiva**

Sia , si dice che è suriettiva su se il codominio coincide con l’insieme delle immagini, ovvero e si scrive . È importante notare che ogni funzione è suriettiva in un apposito codominio.

Una funzione che sia iniettiva e suriettiva è detta biunivoca o biiettiva.

La funzione composta di due funzioni suriettive è un’altra funzione suriettiva (sull’insieme di arrivo) solo se il codominio della prima funzione coincide con il dominio della seconda.

**Funzione inversa**

Condizione necessaria e sufficiente affinché una funzione sia invertibile è che essa sia biunivoca. Condizione sufficiente affinché una funzione sia invertibile è che essa sia strettamente monotona.

Sia , si dice funzione inversa di la funzione tale che

La funzione inversa è simmetrica della funzione di partenza per simmetria assiale rispetto a .

La funzione composta , ovvero , costituisce un’identità.

**Intervallo**

Sia , è un intervallo se ha più di un elemento e , ovvero un qualsiasi insieme senza vuoti. Un intervallo che contenga un solo elemento è detto degenere. Un intervallo è individuato dai suoi estremi, e può essere limitato o illimitato. Si impiegano le notazioni seguenti ; .

**Funzioni pari e dispari**

Sia si dice un insieme simmetrico rispetto all’origine se , ovvero .

Sia simmetrico rispetto all’origine e , • è pari

• è dispari

Se è dispari e (dominio di ), allora .

**Funzioni periodiche**

Siano e , si dice che l’insieme è -periodico se .

Siano e , , è -periodica, o periodica di periodo, se .

**Funzioni crescenti e decrescenti**

Siano ; ; *è monotona crescente*

*è monotona strettamente crescente*

*è monotona decrescente*

*è monotona strettamente decrescente*

La funzione composta di due funzioni monotone è ancora monotona, ed è crescente se le due funzioni sono dello stesso tipo (entrambe crescenti/decrescenti), mentre è decrescente se le due funzioni sono di tipo diverso.

Se una funzione è strettamente monotona, è iniettiva, quindi invertibile, e la sua inversa è strettamente monotona dello stesso tipo.

Continuità

**Funzioni continue**

Siano ; ; , si dice che è continua in se, per ogni successione in e convergente in , la successione trasformata secondo converge a , ovvero . Una funzione è propriamente continua quando è continua in tutto il suo dominio.

Data una funzione definita in un intervallo. Se questa è strettamente monotona, e quindi iniettiva, se ne deduce la continuità e viceversa.

Si dice che è discontinua se esiste una successione in e convergente in tale che il limite di , se esiste, non tende a . Una discontinuità in un punto si traduce graficamente in un “buco” nell’insieme immagine della funzione.

Con si indica l’insieme delle funzioni continue da ad. Questo è uno spazio vettoriale di dimensione infinita, infatti è sempre continua la somma di due funzioni (operazione binaria) e la moltiplicazione di una funzione per uno scalare.

Siano , , , se è continua in , allora è continua in anche considerando ogni qualsiasi restrizione del suo dominio .

**Intorno**

Sia , si dice intorno di qualunque intervallo chiuso simmetrico rispetto a , con .

Un sottoinsieme di è un intorno di se e solo .

Quindi è formato da tutti e soli i punti che distano da al massimo .

Si dice intorno di ogni insieme del tipo e si dice intorno di ogni insieme del tipo con .

**\*Teorema: località della continuità**

Siano ; ; ; . Se esiste un intorno di tale che e

, allora è continua in se e solo se è continua in .

Se è un intervallo e , allora è continua in se e solo anche è continua.

Dimostrazione: supponendo continua in , anche deve essere continua in . Sia una successione in convergente a , allora definitivamente , quindi definitivamente . Modificando opportunamente i primi termini di si può costruire una successione in che coincide definitivamente con . Allora si ha che , quindi perché è continua, quindi definitivamente , ovvero definitivamente , perciò , quindi è continua in .

**\*Teorema: caratterizzazione della continuità**

Siano ; ; , sono equivalenti:

• è continua in

• per ogni intorno di esiste un intorno di tale che ,

•

Dimostrazione: i punti 2 e 3 sono equivalenti, si dimostra che 1 implica 3, ovvero che implica .

Quindi .

Posto , considerando la successione, , , quindi ovvero . Inoltre, , quindi non è vero che .

Si dimostra, poi, che 3 implica 1.

Sia una successione in convergente a , allora . Fissato , se , se allora , quindi e quindi .

**\*Teorema: esistenza degli zeri**

Sia, se è continua e , allora . (*esiste almeno un* )

Dimostrazione: dato l’intervallo limitato e chiuso , questo verrà ridotto continuamente della metà fino a che lo zero della funzione non coincide con il punto medio di una frazione di intervallo considerata. Posto , , , si sceglie oppure a seconda di dove la funzione assume valori di segno opposto. Se la tesi è verificata, altrimenti si continua definendo i nuovi estremi come e oppure e a seconda di dove la funzione assume valori di segno opposto.

Si ripete il procedimento fino a che la funzione si annulla nel punto medio dell’intervallo. Se questo è infinito, si definiscono due successioni e tali che: (crescente) e (decrescente); ;

. Esse sono limitate, infatti , quindi hanno limite reale. , quindi se ,

, per il teorema del confronto . Inoltre, anche, perché . , , ma siccome è continua, . Lo stesso per , ovvero e .

Dal momento che e anche , . Il risultato ottenuto dipende dalla completezza del campo .

**Teorema dei valori intermedi**

Siano ; . Se è continua e se è un intervallo, allora la funzione è limitata ed assume valori unicamente in , che è un intervallo (immagine della funzione), eventualmente degenere (ovvero è solo un punto, se la funzione è costante).

**Teorema di Weierstrass**

Sia. Se è continua allora ha massimo e minimo all’interno dell’intervallo limitato e chiuso . Massimo e minimo della funzione sono valori dell’insieme immagine, quindi è limitata.

**Teorema: proprietà algebriche delle funzioni continue**

Siano ; ; ; e continue nel punto

• la funzione somma è continua in ;

• la funzione prodotto è continua in ;

• se , è continua in

**\*Teorema: permanenza del segno per funzioni continue**

Siano ; ; ; continua in .

intorno di t.c. .

Dimostrazione : preso l’intorno di incluso in , è continua, quindi, per il teorema di caratterizzazione della continuità, esiste un intorno di tale che , quindi

**\*Teorema: continuità della funzione composta**

Siano ; ; ; ; . Se è continua in e è continua in , allora la funzione composta è continua in.

Dimostrazione: sia una successione in convergente in . Poiché è continua in , . è una successione in , dato che è l’insieme immagine di . Per la continuità di in , , cioè che è la condizione di continuità.

**Teorema**

Siano ; . Se è un intervallo, e è continua e strettamente monotona (quindi iniettiva, condizione per l’esistenza dell’inversa) allora anche la sua inversa è continua.

Limiti

**Limite di una funzione**

Siano un intervallo di , anche forato; ; ; **.**

Si dice che ha limite , per , ovvero se, comunque presa una successione in , convergente a , la successione trasformata è convergente a.

Sono equivalenti: •

• Per ogni intorno di , esiste un intorno di tale che ,

Il limite, per , di una funzione continua in è definito come . Questo può anche essere usato per verificare la continuità della funzione in un punto.

Non è richiesto che appartenga propriamente al dominio della funzione.

Note: • se una costante moltiplicativa tende ad un valore preciso (non ), la si può sostituire con tale valore.

• se una costante moltiplicativa tende ad un valore preciso, la si può portare fuori dall’operatore di limite

• può risultare utile cambiare variabile, ponendo , oppure uguale ad una funzione, aggiustando opportunamente il limite.

• la gerarchia di infiniti (composta di potenza ed esponenziale, fattoriale, esponenziale, potenza, logaritmo) si applica, risolvendole, anche alle forme indeterminate del tipo

• ogni polinomio si comporta come il suo termine di grado più alto (per limite a ), o come il suo termine di grado più basso, incluso il termine noto (per limite a ).

**Teoremi sul limite di funzione**

•Unicità del limite: se e anche con , allora

•Teorema del confronto: se ; ;, e se , allora

**Teorema della permanenza del segno**

Siano un intervallo di , anche forato; ; ; ; ,

se , allora esiste un opportuno intorno di tale che , .

**Teorema**

Siano un intervallo di , anche forato; ; ; ; :

• esiste un intorno di tale che è limitato;

• esiste un intorno di tale che è inferiormente limitato, e per ogni intorno di , è superiormente illimitato;

• esiste un intorno di tale che è superiormente limitato, e per ogni intorno di , è inferiormente illimitato.

**\*Teorema: limite di una restrizione**

Siano due intervalli di , anche forati, tali che ; inoltre sia , .

Se esiste , allora esiste anche e questi coincidono. L’implicazione non è valida nel senso opposto.

**Teorema: limite di una composizione**

Siano due intervalli di , anche forati; ; ; ; .

Se: • ;

• ;

• e è continua in , oppure intorno di t.c. , (

Allora .

**Limite da destra e da sinistra**

Siano un intervallo di , anche forato; ; :

* Se ed esiste , si ha che ammette limite destro uguale a per , ovvero .
* Se ed esiste , si ha che ammette limite sinistro uguale a per , ovvero .

Sono equivalenti: •

• e

Per una funzione continua in un punto, .

Il limite da destra e da sinistra sono limiti normali, calcolati su due diverse restrizioni del dominio della funzione.

Le notazioni e specificano che il limite da destra o da sinistra può essere calcolato solo se esistono valori del dominio della funzione rispettivamente a destra o a sinistra di . Come per ogni limite normale, non è richiesto che appartenga propriamente al dominio della funzione. Se non è incluso nel dominio della funzione, non vale la definizione di continuità . Il limite può non esistere, oppure rappresentare un asintoto, oppure assumere valori diversi da destra e da sinistra.

Nei casi particolari in cui oppure , rispettivamente e .

**Teorema sul limite di funzioni monotone**

Siano un intervallo di , anche forato; con monotona:

• Se , allora si ha che

• Se , allora si ha che

**Limiti notevoli**



Derivate

**Rapporto incrementale**

Siano un intervallo di , anche forato; ; con , si chiama rapporto incrementale di fra i punti e il numero . Il rapporto incrementale può essere positivo o negativo.

Geometricamente, il rapporto incrementale fra due punti fornisce il coefficiente angolare, quindi la pendenza, quindi la tangente dell’angolo con l’asse positivo, della retta che li congiunge.

In generale, se è derivabile volte (con ), e la sua derivata esima è ancora derivabile in , allora si dice che è derivabile volte in , e la sua -esima derivata ha ordine di derivazione pari a .

**Derivata**

Siano un intervallo di , anche forato; ; .

Si dice che è derivabile in quando esiste ed è reale il limite del rapporto incrementale definito come oppure . Il limite così definito si chiama derivata di in e si indica con , , .

**Funzione derivabile**

Siano un intervallo di , anche forato; ; .

è detta “derivabile in ” se è derivabile in ; è detta “derivabile” se , è derivabile in .

La funzione derivata fa corrispondere, ad ogni punto del dominio di una funzione, il valore della derivata della funzione stessa in quel punto.

**\*Teorema: caratterizzazione delle funzioni derivabili**

Siano un intervallo di ; ; . Sono equivalenti:

• è derivabile in ;

• tale che per ;

• continua in e tale che ;

Se tali affermazioni sono vere, allora .

La notazione , al punto 2, fornisce informazioni sulla differenza fra ed il polinomio di primo grado , affermando che questa è molto piccola (e tende a più velocemente di ), per . In simboli: .

Dal punto 3, , dove l’ultimo termine è uguale a , perché è continua in .

Quindi, , che, ponendo la costante uguale a , è la definizione del punto 2.

Dal punto 2, , che risulta uguale a con per .

Dal punto 2 si conclude l’esistenza (ed unicità) di una retta tangente al grafico della funzione nel punto , ovvero quella retta, passante per e di pendenza , che meglio di ogni altra approssima l’andamento della funzione nel punto . L’equazione della retta tangente è quindi .

Dimostrazione: . Supposta vera la proposizione 1, si ha che , cioè per . Quindi . Verificato.

. Se per , allora per , . Verificato.

**\*Teorema: continuità delle funzioni derivabili**

Siano un intervallo di ; ; . Se è derivabile in , allora è continua in . Non è vero il contrario.

Dimostrazione: se f è derivabile, allora vale il punto 3 del Teorema sulla caratterizzazione delle funzioni derivabili, quindi continua in e tale che . In particolare, è una funzione di continua in , quindi anche è continua in .

**\*Teorema: algebra delle derivate**

Siano un intervallo di ; ; ; ; ; e derivabili in .

• è derivabile in , e (

• è derivabile in , e (

• è derivabile in , e (

• Se , ), allora è derivabile in , e

• Se , ), allora è derivabile in , e

Se una funzione è ottenuta mediante composizione algebrica delle funzioni derivabili e , anche è derivabile. Se o non sono derivabili, non si può trarre alcuna conclusione.

**\*Teorema: derivata di una composizione**

Siano due intervalli di ; ; ; ; . Se è derivabile in , e è derivabile in , allora è derivabile in e .

Dimostrazione: per il terzo punto del teorema di caratterizzazione delle funzioni derivabili, continua in e tale che , con . Allo stesso modo, continua in e tale che , con .

Dallo stesso teorema si ha che . Questo assicura che la funzione composta sia derivabile se è continua: è continua in , è continua in , quindi è continua in . Quindi, per lo stesso teorema, .

**Teorema: derivata della funzione inversa**

Siano un intervallo di ; una funzione strettamente monotona; .

Se è derivabile in e , allora è derivabile in : .

Infatti, se è funzione inversa di , , quindi , quindi .

**Teorema: test di monotonia**

Siano un intervallo di ; una funzione continua in e derivabile in .

• è crescente

• è decrescente

Il teorema è valido solo per funzioni definite e continue in un intervallo.

La dimostrazione è una conseguenza del teorema di Lagrange.

Se la derivata di una funzione in un punto è nulla, la tangente al grafico è orizzontale. Se la derivata è nulla in ogni punto, la funzione è costante (una retta orizzontale).

**Teorema: test di monotonia stretta**

Siano un intervallo di ; una funzione continua in e derivabile in .

• è strettamente crescente

• è strettamente decrescente

**Massimi, minimi e punti estremanti**

Siano un intervallo di ; ; .

* è punto di massimo locale o relativo se, appartenente ad un opportuno intorno di , ;

. è massimo locale o relativo.

* è punto di minimo locale o relativo se, appartenente ad un opportuno intorno di , ;

. è minimo locale o relativo.

* è punto di massimo locale forte se, appartenente ad un opportuno intorno di , ;

.

* è punto di minimo locale forte se, appartenente ad un opportuno intorno di , ;

.

Se è un punto di massimo o minimo relativo, si dice punto estremante locale, e è un estremo locale.

I punti di massimo e minimo sono definiti anche dove non è derivabile.

Notare come massimo e minimo siano elementi dell’immagine della funzione, mentre i punti di massimo e minimo sono elementi del dominio della funzione.

Il massimo o minimo assoluto di una funzione, se esiste, è anche massimo o minimo locale, ma non viceversa.

Ogni punto di massimo o minimo locale forte è anche punto di massimo o minimo locale.

**\*Teorema di Fermat**

Siano un intervallo di ; ; . Se è derivabile in , e è estremante locale per , allora .

Questa è solo una condizione necessaria, non vale il viceversa.

deve essere un punto interno all’intervallo e non può essere un estremo.

Dimostrazione: supponendo un punto di massimo, tale che , , per la definizione di punto di massimo. Scegliendo opportunamente piccolo, si può supporre che l’intervallo sia incluso in : . Si distinguono due casi. Da sinistra, ovvero se , si ha che , perché il numeratore è negativo, come il denominatore. Da destra, ovvero se , si ha che , perché il numeratore è negativo, mentre il denominatore è positivo. L’unica possibilità è che .

**Teorema di esistenza di un estremante locale (condizione sufficiente)**

Siano un intervallo di ; ; ; t.c. ; continua in e derivabile in .

• se e , allora è un punto di massimo locale e è max;

• se e , allora è un punto di minimo locale e è minimo.

Non è richiesta la derivabilità nel punto . I punti dove non è derivabile sono estremanti locali.

**\*Teorema di Rolle**

Sia , se è continua nell’intervallo chiuso , derivabile nell’intervallo aperto , e se , allora t.c. .

Esiste almeno un punto dove la funzione ha tangente orizzontale, e è un massimo o un minimo.

Dimostrazione: si applica il teorema di Weierstrass, di cui soddisfa le ipotesi, quindi ammette massimo e minimo appartenenti all’intervallo . Risulta vera almeno una delle seguenti:

1. , ovvero il massimo e il minimo coincidono con gli estremi, la funzione è costante e ha sempre derivata nulla:
2. e quindi tale che , poiché e , si ha che e , quindi . In tal caso, verifica il teorema di Fermat, quindi .

**\*Teorema di Lagrange, del valor medio**

Sia , se è continua nell’intervallo chiuso , derivabile nell’intervallo aperto , allora

t.c. . Ovvero esiste almeno un punto tale per cui la retta tangente al grafico della funzione in sia parallela alla retta che congiunge gli estremi e dell’intervallo.

Dal teorema segue che: 1. Se una funzione ha derivata nulla, allora è costante e viceversa;

2. Due funzioni che hanno la stessa derivata prima differiscono per una costante;

3. Se la derivata è positiva (negativa), la funzione è crescente (decrescente).

Dimostrazione: sia tale che , in tal caso verifica il teorema di Rolle, infatti è la differenza fra ed un polinomio di primo grado: è quindi continua, derivabile e . Per Rolle, t.c. . .

**Teorema sul limite della funzione derivata**

Siano un intervallo di ; ; ; continua in e derivabile in .

Se esiste , e se , allora è derivabile in e , ovvero, per definizione, la derivata è continua in .

La derivabilità può essere studiata attraverso il limite di , anziché del rapporto incrementale.

Il teorema consente di dedurre i punti tali per cui non è derivabile in , ovvero gli stessi punti dove la derivata prima, , non è continua. Questo si ha in ogni caso dove : il limite è divergente e/o i limiti destro e sinistro non coincidono.

**Polinomio di Taylor**

Siano un intervallo di ; ; ; . Supposto derivabile volte in , e volte in , si dice polinomio di Taylor, di ordine e punto iniziale , per il polinomio .

Il polinomio di Taylor calcolato in coincide con il valore che la funzione assume in , ovvero .

Se , si ottiene l’equazione della retta tangente ad in , mentre con della parabola osculatrice.

Il polinomio di Taylor consente di approssimare, con precisione sempre maggiore al crescere di , il comportamento della funzione attorno al punto , attraverso un polinomio.

**Formula di Taylor con resto nella forma di Peano**

Siano un intervallo di ; ; ; . Supposto derivabile volte in , e volte in , allora

per , ovvero , ovvero .

**Formula di Taylor con resto nella forma di Peano**

Siano un intervallo di ; ; ; . Supposto derivabile volte, allora compreso fra e e tale che .

**Teorema di De L’Hopital**

Siano un intervallo di ; ; . Se:

• e sono derivabili in ;

• oppure

• ,

•

Allora si ha che .

Integrali

**Somma di Riemann**

Sia ; ; . Si dice somma di Riemann per , relativa alla scelta di punti (, il numero reale

Esiste ed è reale il limite per della somma di Riemann, e tale limite non dipende dalla scelta di punti, il limite è chiamato integrale di in .

**Teorema: linearità dell’integrale**

Siano ; . •

•

L’integrale è una trasformazione lineare dallo spazio vettoriale a .

**Funzione integrale**

Sia un intervallo;; . Si dice funzione integrale di la funzione tale che .

**Primitiva di una funzione**

Sia un intervallo; . è una primitiva di se è derivabile e .

Se una funzione è continua ammette infinite primitive, che differiscono per una costante. L’integrale indefinito di una funzione è l’insieme di tutte le sue primitive.

**\*Teoremi**

Siano due funzioni tali che , allora

Sia ; ;

Sia ; si ha che

Dimostrazione: , quindi e quindi .

**\*Teorema: media integrale**

Sia •

•

Dimostrazione: 1) , quindi , quindi .

2) è continua nell’intervallo , per il teorema dei valori intermedi, anche è un intervallo, ovvero , quindi .

**\*Teorema fondamentale del calcolo integrale (1)**

Sia una funzione derivabile con derivata continua, allora .

Allo stesso modo, siano , se è una primitiva di , allora .

Dimostrazione: siano ; la scomposizione di ; . Per il teorema di Lagrange tale che , quindi la somma di Riemann è uguale a .

**\*Teorema fondamentale del calcolo integrale (2)**

Sia un intervallo; Se è funzione integrale per , allora è una primitiva di .

Dimostrazione: sia , la dimostrazione è analoga per . quindi , dove è un valore la cui esistenza è garantita dal teorema della media integrale. Per la continuità di , se , .

**\*Teorema: integrazione per parti**

Siano , con funzione derivabile con derivata continua; una primitiva di .

Dimostrazione: ricordando che , per poi sostituire a , .

**\*Teorema: integrazione per sostituzione**

Siano due intervalli;; derivabile con derivata continua. Supposto , • ,

• Se è iniettiva,

Dimostrazione 1: sia una primitiva di . Si ha che , quindi .

Tecniche di integrazione

**Riconduzione ad integrali elementari**

**Se il numeratore è di grado maggiore o uguale al denominatore**

Divisione fra polinomi:

**Funzioni razionali fratte (tutti i casi)**

Fattorizzare il denominatore poi scomporre come

**Integrazione per parti**

**Seno e coseno elevati a potenza**

Abbassare di grado le potenze pari con , .

**Sostituzioni**

•

•

•

•

•

Insiemi

Ogni elemento di A appartiene a B e viceversa. Due insiemi con gli stessi elementi costituiscono lo stesso insieme: un insieme è definito solo dai suoi elementi.

Il prodotto cartesiano di due insiemi forma coppie ordinate di elementi, non è commutativo.

Una qualsiasi operazione che fa corrispondere un valore ad una coppia ordinata è detta operazione binaria se:

**Massimo e minimo**

Siano , è massimo di se: •

•

è minimo di se: •

•

max e min, se esistono, sono sempre elementi dell’insieme.

Gli insiemi inclusi in che hanno un numero finito di elementi hanno sicuramente un massimo e minimo.

Per gli insiemi infiniti può non essere sempre possibile determinare il massimo o il minimo o entrambi.

**Maggiorante e minorante**

Siano , è un maggiorante di se

è un minorante di se

Un insieme può non ammettere maggiorante o minorante, ma se ne ammette, questi sono infiniti.

**Insiemi limitati**

Sia , è superiormente (inferiormente) limitato se esistono maggioranti (minoranti) di , altrimenti è superiormente (inferiormente) illimitato. è limitato se è limitato sia superiormente che inferiormente.

\*Sia , se è superiormente (inferiormente) limitato, allora l’insieme dei maggioranti (minoranti) di ammette un minimo (massimo).

Affermare che una funzione è limitata (sup. o inf.) equivale a dire che l’insieme delle immagini è limitato.

**Estremo superiore ed inferiore**

Sia , se è superiormente limitato, si chiama estremo superiore di () il minimo dell’insieme dei maggioranti di . Viceversa, se è inferiormente limitato, si chiama estremo inferiore di () il massimo dell’insieme dei minoranti di .

Se esiste un massimo (minimo), questo coincide con l’estremo superiore (inferiore) di .

è superiormente illimitato

è inferiormente illimitato

**\*Principio di induzione**

Sia una proposizione che ha senso (si conosce se è vera o falsa), se è vera o, alternativamente, è vera, e, supposta vera , questa è vera anche per , si ha che è vera .

Relazioni

Siano , si dice relazione da a qualunque sottoinsieme di x . Se = , si dice che la relazione è “in / su ”.

1. è riflessiva se *ad. Es.: relazione di divisione*
2. è simmetrica se *ad. Es.: “la differenza è pari”*
3. è antisimmetrica se *ad. Es.: “m divide n”*
4. è transitiva se *ad. Es.: relazione di inclusione*

Siano un insieme e una relazione,

è una relazione di equivalenza se è riflessiva, simmetrica e transitiva;

è una relazione d’ordine se è riflessiva, antisimmetrica e transitiva.

è una relazione d’ordine totale (o lineare) se è definita su tutto (per ogni elemento di )

Numeri reali

Il sistema dei numeri reali è una quadrupla ordinata dove è un insieme; e sono operazioni binarie in ; è una relazione d’ordine in . Inoltre:

* è un campo: C1) *associatività*

C2) *associatività*

C3) *commutatività*

C4) *commutatività*

C5) *el. neutro addittivo*

C6)  *el. neutro moltiplicativo*

C7) *inverso addittivo*

C8) *inverso moltiplicativo*

C9) *distributività*

* è ordinato: O0) è una relazione d’ordine totale

O1) *compatibilità*

O2) *compatibilità*

* è completo: siano, e sono insiemi separati se

se e sono insiemi separati allora e

\*Non esiste l’inverso moltiplicativo di 0.

\*Legge di annullamento del prodotto:

**\*Teorema sull’elevamento al quadrato**

Siano , •

•

•

**Parte intera di un numero reale**

Sia , si chiama parte intera di il numero intero , e lo si indica con . Conseguentemente, si ha che

**Disuguaglianza di Bernoulli**

**\*Radice n-esima in**

Siano , esiste ed è unica la radice n-esima di “” se e quindi .

**Valore assoluto**

Geometricamente, il valore assoluto di un numero reale è la sua distanza dall’origine, ovvero la lunghezza del segmento che lo separa dall’origine. Una distanza è sempre positiva ed è uguale a 0 solo se il numero scelto è 0.

Due punti simmetrici rispetto all’origine hanno lo stesso valore assoluto. Anche il valore assoluto di una differenza è una distanza dall’origine.

Sia, si definisce il valore assoluto di il numero reale tale che:

Sia, si ha che: •

•

•

•

\*Siano , •

•

• *disuguaglianza triangolare*

•